Physique générale I – Section de physique – Prof. Jean-Philippe Ansermet

26 juin 2012 - 8h15-11h15

Examen Propédeutique

1. Machine de Rankine idéale (2.5/10 points)

La machine de Rankine idéale est modélisée par un gaz parfait satisfaisant les équations d'état usuelles,

$$U = cnRT \qquad \text{et} \qquad PV = nRT \ ,$$

et effectuant le cycle décrit sur la figure ci-contre. La chaleur spécifique à pression constante

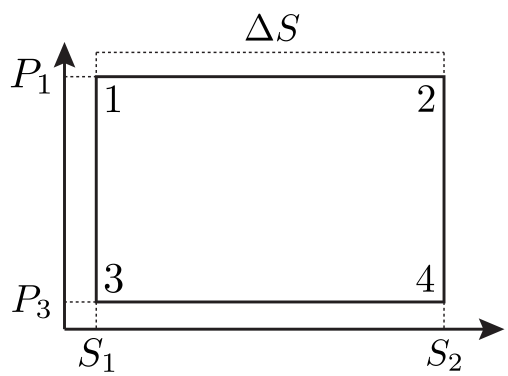
$$c_P = (c+1)\, nR$$

est donnée et

$$\frac{\partial S(T,P)}{\partial T} = \frac{c_P}{T} \ .$$

Pour une transformation adiabatique,

$$PV^{\gamma} = \text{cste} \qquad \text{avec} \qquad \gamma = 1 + \frac{1}{c} \ .$$



Toute autre formule concernant le gaz parfait doit être démontrée. Toutes les réponses doivent être exprimées en fonction des paramètres suivants : P_1, P_3, T_1, V_1, ΔS, n, c_P, c, γ.

a) (**0.5 point**) Déterminer la température T_2 à la fin de la transformation isobare $1 \to 2$. Par la suite, T_2 est supposé connu.

b) (**0.5 point**) Déterminer le travail du gaz W_{12} durant cette transformation isobare.

c) (**0.5 point**) Montrer que la variation d'énergie interne ΔU_{12} durant cette transformation isobare est de la forme,

$$\Delta U_{12} = cnRT_1 \left(\exp\left(\frac{\Delta S}{c_P} \right) - 1 \right) \ .$$

d) (**0.5 point**) Déterminer le travail du gaz W_{23} durant la transformation adiabatique $2 \to 3$.

e) (**0.5 point**) Esquisser le diagramme PV du cycle de Rankine.

2. Point d'ébullition d'un mélange idéal (2.5/10 points)

Soit un mélange idéal d'eau (substance A) et de sel (substance B). Pour un tel mélange, le potentiel chimique de la substance A satisfait la relation

$$\mu_A^{(l)} = \mu_A^{*(l)} + RT \ln (x_A) \ ,$$

où $\mu_A^{*(l)}$ est le potentiel de la substance pure. Dans le cadre de ce modèle, on désire déterminer comment la température d'ébullition de la solution change avec la concentration x_B de sel dans l'eau (où $x_A + x_B = 1$). La phase gazeuse est supposée entièrement constituée de vapeur d'eau.

a) (**0.5 point**) De quel principe général découle la condition d'équilibre,

$$\mu_A^{(l)}(T) = \mu_A^{*(g)}(T) \ ,$$

où (l) désigne la phase liquide et (g) désigne la phase gazeuse.

b) (**0.5 point**) Montrer que dans la limite de faible concentration de sel, i.e. $x_B \ll 1$,

$$\mu_A^{*(g)}(T) - \mu_A^{*(l)}(T) = -\, x_B RT \ .$$

c) (**0.5 point**) A l'aide de la définition de la fonction thermodynamique H, montrer que le potentiel chimique μ^* d'une substance pure, son enthalpie molaire h^* et son entropie molaire s^* sont liés par la relation

$$\mu^* = h^* - Ts^* \ .$$

d) (**0.5 point**) Montrer que

$$-\, x_B RT = \Delta H - T\Delta S \ ,$$

où $\Delta H = h^{*(g)} - h^{*(l)}$ et $\Delta S = s^{*(g)} - s^{*(l)}$.

e) (**0.5 point**) On suppose que ΔH et ΔS sont indépendants de la température autour de la température d'ébullition T^* de l'eau pure. Montrer que

$$T - T^* = x_B \frac{RT}{\Delta S} \ ,$$

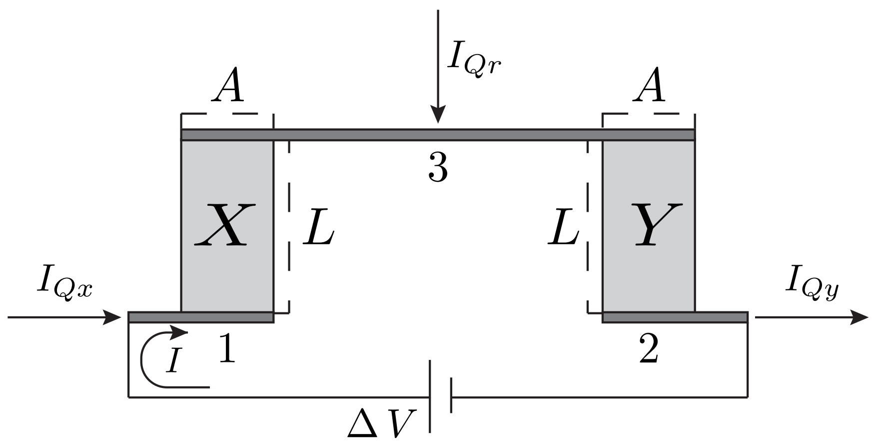
où T^* est la valeur de T lorsque $x_B = 0$.

3. Réfrigérateur Peltier (2.5/10 points)

Le dispositif du réfrigérateur Peltier est constitué de deux barreaux (X et Y) de section A, de longueur L (illustré ci-dessous) reliés électriquement par des contacts 1, 2, et 3 supposés idéaux (i.e. conductivité électrique et thermique infinies). Les barreaux sont faits de deux matériaux qui obéissent aux lois phénoménologiques du transport :

$$\begin{cases} \mathbf{j}_s = -\left(\dfrac{\kappa}{T} + \sigma\varepsilon^2\right)\boldsymbol{\nabla} T - \dfrac{\sigma\varepsilon}{q_e}\boldsymbol{\nabla}\big(\mu_e + q_e V\big)\ , \\ \mathbf{j}_q = -\,\sigma\varepsilon\,\boldsymbol{\nabla} T - \dfrac{\sigma}{q_e}\boldsymbol{\nabla}\big(\mu_e + q_e V\big)\ , \end{cases}$$

où $\mathbf{j}_s$ est la densité courant d'entropie, $\mathbf{j}_q$ est la densité de courant électrique, V est le potentiel électrostatique, q_e et μ_e sont respectivement la charge électrique et le potentiel chimique des électrons de conduction. On suppose que la température T est uniforme dans tout le dispositif. Le barreau X a une conductivité électrique σ_x et un coefficient Seebeck ε_x, et le barreau Y a une conductivité σ_y et un coefficient Seebeck ε_y.



a) (**1.0 point**) Montrer que la densité de courant thermique d'énergie obéit la relation :

$$\mathbf{j}_Q = T\,\varepsilon\,\mathbf{j}_q\ .$$

b) (**0.5 point**) Déterminer le courant électrique I traversant les deux barreaux en fonction des paramètres σ_x, σ_y, ΔV, L, A.

c) (**0.5 point**) Calculer le courant de chaleur I_{Qx} entrant dans le contact 1.

d) (**0.5 point**) Déterminer la puissance de refroidissement I_{Qr} (i.e. un courant thermique d'énergie entrant dans le contact 3).

4. Atmosphère terrestre (2.5/10 points)

On suppose que l'atmosphère terrestre peut être modélisée par un gaz parfait de température uniforme et composé de molécules de masse m. De plus, on suppose que la gravitation peut être modélisée par le modèle de la pesanteur, c'est-à-dire que les molécules subissent une force $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ quelle que soit la hauteur h au-dessus du sol. Ces hypothèses sont évidemment très discutables, mais elles sont imposées pour simplifier le problème. On note $n\left(h\right)$ la densité de l'atmosphère (i.e. le nombre de molécules par unité de volume) dont la valeur au sol est $n_0 = n\left(h = 0\right)$. L'atomsphère satisfait l'équation d'état du gaz parfait, i.e. $P\left(h\right) = n\left(h\right) kT$, où k est la constante de Boltzmann.

a) (**1.0 point**) La distribution de probabilité de Boltzmann $p\left(h\right) dh$ en fonction de la hauteur h est de la forme,

$$p\left(h\right) dh = \frac{1}{Z} \exp\left(-\, f\left(h\right)\right) dh \ ,$$

où Z est la constante de normalisation et $f\left(h\right)$ est une fonction de h. Déterminer Z et $f\left(h\right)$ en utilisant le fait que la norme v de la vitesse des molécules et h sont des variables indépendantes, i.e.

$$p\left(v, h\right) dh\, dv = p\left(h\right) dh\, p\left(v\right) dv \ .$$

b) (**0.5 point**) Pour une colonne de gaz atmosphérique, montrer que

$$\frac{dP\left(h\right)}{dh} = -\, mg\, n\left(h\right) \ ,$$

en faisant le bilan des forces exercées sur une tranche de cette colonne située entre h et $h + dh$.

c) (**0.5 point**) Déduire l'expression de $n\left(h\right)$ de l'équation différentielle pour $P\left(h\right)$.

d) (**0.5 point**) Pour des molécules de gaz de gaz atmosphérique de masse molaire $M = 25\,[\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}]$ à une température telle que $RT = 2500\,[\mathrm{J}]$, déterminer la hauteur h pour laquelle $\ln\left(P/P_0\right) = -\,0.1$ (prendre $g = 10\,[\mathrm{m \cdot s^{-2}}]$).